

Výpočty integrálů

Základní výpočty ze vzorců

Při určování základních integrálů je třeba vycházet z toho, že $\forall c \in \mathbb{R}$ a pro každé funkce f a g , platí vztah

$$\int c \cdot (f(x) \pm g(x)) dx = c \cdot \int f(x) dx \pm c \cdot \int g(x) dx$$

Tedy, že integrál součtu (resp. rozdílu) funkcí je součet (resp. rozdíl) integrálů těchto funkcí a že jakoukoliv konstantu lze "vytknout" před integrál. Obě tyto vlastnosti vycházejí z vět o derivacích funkcí.

V případě, že integrujeme podíl dvou funkcí, bývá velmi výhodné sledovat, zda čítec není derivací jmenovatele (nebo násobkem). Potom lze totiž snadno integrovat podíl podle věty

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$

což významně ulehčí výpočet. Důkaz této věty je poměrně prostý:

Důkaz: Nechť $F(x) = \ln |f(x)| + c$, potom

$$F'(x) = (\ln |f(x)| + c)' = (\ln |f(x)|)' + (c)' = \frac{1}{|f(x)|} \cdot f'(x) + 0 = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

a tedy zřejmě platí, že

$$\int F'(x) dx = F(x) \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$

a) $\int x^2 - 2x^4 + 4 dx$

b) $\int \frac{1}{4x^2} - 2x^3 dx$

c) $\int \frac{3}{x^7} - 2\sqrt{x} dx$

d) $\int x^3(4+x)^2 dx$

e) $\int 2^x - \frac{1}{x^3} dx$

f) $\int \sqrt{x}(2-3\sqrt{x}) dx$

g) $\int \frac{(x+1)^3}{2\sqrt{x}} dx$

h) $\int \frac{3x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt[4]{x^3}}{x} dx$

i) $\int 2 \sin x - 4 \cos x dx$

j) $\int 3 \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x dx$

k) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx$

l) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x} dx$

m) $\int e^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x dx$

n) $\int \sqrt[4]{x^3} - \sqrt{x^5} dx$

o) $\int \frac{3x^2 + 2x}{x^3 + x^2 - 4} dx$

p) $\int \frac{1}{\sin^2 x \operatorname{cotg} x} dx$

q) $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} dx$

Integrace per partes

Častou situací při hledání primitivních funkcí je řešení integrálu ze součinu funkcí. Pokud vyjdeme z derivace součinu funkcí u, v , dostaneme rovnost

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Po integraci obou stran podle proměnné x získáváme

$$u(x) \cdot v(x) = \int u'(x) \cdot v(x) dx + \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

a tedy po odečtení jednoho z integrálů platí

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

Mimochodem všimněme si, že při volbě $u(x) = c$, kde $c \in \mathbb{R}$, $v'(x) = f(x)$ dostáváme

$$u'(x) = 0, \quad v(x) = \int f(x) dx$$

a tedy po dosazení

$$\int \underbrace{c}_{u(x)} \cdot \underbrace{f(x)}_{v'(x)} dx = \underbrace{c}_{u(x)} \cdot \underbrace{\int f(x) dx}_{v(x)} - \int \left(\underbrace{0}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\int f(x) dx}_{v(x)} \right) dx = c \cdot \int f(x) dx$$

Při integraci per partes je nejzásadnější správná volba toho, kterou funkci budeme pro účely dalšího výpočtu derivovat (tu zvolíme jako $u(x)$), a kterou budeme integrovat (to volíme jako $v'(x)$). Obecně lze říci, že každý mnohočlen budeme derivovat, protože po konečném počtu derivací z něj postupně dostaneme konstantu, kterou zderivujeme na nulu, čímž jeden člen zcela vymizí. Podobně volíme za $u(x)$ vždy cyklotrické a logaritmické funkce (už jen z toho důvodu, že jejich integrály neznáme, případně nám jejich tvar nijak nepomůže). Naopak za funkce, které budeme integrovat volíme (téměř vždy) funkci e^x , neboť se jedná o jednu z mála funkcí, která se po integraci nestává komplikovanější. Někdy je také vhodné o integrované funkci $h(x)$ uvažovat jako o součinu $1 \cdot h(x)$ a funkci h derivovat a funkci 1 integrovat na x . To se hodí především v situacích, kdy víme, že funkce h se derivováním výrazně zjednoduší, anebo pokud víme, že x získané integrací funkce 1 půjde vykrátit.

- | | | |
|--------------------------------|---|--------------------------------------|
| a) $\int x^2 \ln x dx$ | h) $\int x^2 2^x dx$ | o) $\int \ln(x^2 + 1) dx$ |
| b) $\int e^x x^2 dx$ | i) $\int (2x + 5) \cos x dx$ | p) $\int e^x \cos(2x - 1) dx$ |
| c) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$ | j) $\int x \operatorname{arccotg} x dx$ | q) $\int \cos x \ln(\sin x) dx$ |
| d) $\int x \sin x dx$ | k) $\int \sin(\ln x) dx$ | r) $\int (x^2 + 3x - 7)e^x dx$ |
| e) $\int x^2 \cos x dx$ | l) $\int x \ln^2 x dx$ | s) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ |
| f) $\int \sin x \cos x dx$ | m) $\int \cos^2 x dx$ | t) $\int \frac{5 + 2 \ln x}{x^3} dx$ |
| g) $\int e^x \sin x dx$ | n) $\int 2^x \sin x dx$ | u) $\int \sqrt[3]{x} \ln x dx$ |

Substituční metoda

Substituční metoda výpočtu integrálů je určena pro integraci složených funkcí. Celá metoda vychází z vlastností derivace složené funkce. Máme-li totiž funkci $f(x) = h(g(x))$ (tedy g je vnitřní funkce a h je vnější funkce), platí pro derivaci funkce f , že ji lze spočítat jako $f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$. Položíme-li substituci $g(x) = t$ (kde t je nová proměnná, podle které budeme integrovat), potom zcela jistě platí, že $g'(x) dx = t' dt$ a tedy $g'(x) dx = dt$.

V praxi tedy zavedeme substituci a následně zderivujeme funkci g , abychom zjistili, čemu se rovná dt . Integrály počítané substituční metodou na střední škole jsou často velmi jednoduché a substituce je poměrně nasnadě hned po přečtení zadání. Na vysoké škole se při výpočtech setkáte se substitucemi, které jsou na výpočet daleko náročnější a především - člen dt bývá často vyjádřen velmi komplikovaně a integrovaná funkce se substitucí velmi zkomplikuje (nakonec ji ale lze díky substituci vypočítat).

Na konci výpočtu se vždy vracíme do původní proměnné!

Substituční metodu si předvedeme na konkrétním příkladu. Máme vypočítat integrál

$$\int \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx$$

Integrovaní vyžaduje mnoho zkušeností, je třeba umět rozpoznat, kam chceme výpočet dovést. V první chvíli nás jistě napadne substituce $t = 1 - x^6$. Problém ale tkví v tom, že pokud se budeme snažit najít vyjádření dt , vyjde $dt = -6x^5 dx$, což je výraz, který v zadaném integrálu nelze jednoduše vytvořit (uvědomme si, že nelze do integrálu jen tak přidat x^3 , protože tento výraz závisí na přírůstku dx !).

Bylo by samozřejmě možné celý zlomek rozšířit výrazem $\frac{-3x^3}{-3x^3}$, čímž sice vytvoříme potřebný čítelec, ale jmenovatel se neúměrně zkomplikuje - přibude v něm výraz $-3x^3$, který je nutné vyjádřit pomocí nové proměnné t . Toto vyjádření je $-3x^3 = -3\sqrt{-t-1}$, což integraci de facto znemožní.

V tomto případě si všimneme, že bychom uměli nalézt integrál $\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$, zavedeme tedy substituci $t = x^3$, čímž vychází $dt = 3x^2 dx$. Výpočet integrálu poté vypadá následovně:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx &= \int \frac{\frac{2}{3} \cdot 2x^2}{\frac{2}{3} \cdot \sqrt{1-x^6}} dx = \|subs.: \quad t = x^3 \quad dt = 3x^2 dx\| = \frac{2}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \\ &= \frac{2}{3} \arcsin t + c = \frac{2}{3} \arcsin x^3 + c \end{aligned}$$

a) $\int \cos(2x-3) dx$

b) $\int e^{2x+1} dx$

c) $\int (3x+5)^6 dx$

d) $\int \frac{1}{(2x-3)^3} dx$

e) $\int \sqrt{3-2x} dx$

f) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}} dx$

g) $\int \frac{1}{x^2+3} dx$

h) $\int \frac{1}{x^2+4x+17} dx$

i) $\int \frac{1}{4x^2-4x+1} dx$

j) $\int \frac{1}{2x^2+2x+1} dx$

k) $\int x\sqrt{1-x^2} dx$

l) $\int \sin x e^{\cos x} dx$

m) $\int \cos^3 x dx$

n) $\int \cos x \sqrt[3]{\sin x} dx$

o) $\int \frac{e^{\tan x}}{1-\sin^2 x} dx$

p) $\int \frac{e^{2x}}{3+e^{2x}} dx$

q) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$

r) $\int \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x^2} dx$

s) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx$

t) $\int x^3 e^{-x^2} dx$

u) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$

v) $\int \frac{e^x-1}{e^x+1} dx$

w) $\int \frac{1}{e^{2x}+e^x-2} dx$

x) $\int x \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$

Různé a zajímavé

$$1) \int \ln x \, dx$$

$$2) \int \log_a x \, dx$$

$$3) \int \arcsin x \, dx$$

$$4) \int \arccos x \, dx$$

$$5) \int \operatorname{arctg} x \, dx$$

$$6) \int \operatorname{arccotg} x \, dx$$

$$7) \int \operatorname{tg} x \, dx$$

$$8) \int \operatorname{cotg} x \, dx$$

$$a) \int \frac{1}{\sqrt{9+4x^2}} \, dx$$

$$b) \int x \cdot \frac{\sin x}{\cos^3 x} \, dx$$

$$c) \int \frac{5x-3}{x^2-5x+6} \, dx$$

$$d) \int \frac{2x^2+x+2}{x^3+x^2} \, dx$$

$$e) \int \frac{x^4}{x^4-1} \, dx$$

$$f) \int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} \, dx$$

$$g) \int \frac{1}{4^x+2^x-2} \, dx$$

$$h) \int \frac{1}{\sin^3 x} \, dx$$

$$i) \int e^{\sqrt{x}} \, dx$$

$$j) \int \frac{\ln(1-x)}{\sqrt[3]{1-x}} \, dx$$

$$k) \int \frac{\operatorname{cotg} x}{\sin x + \cos x - 1} \, dx$$

$$l) \int \frac{1}{\sqrt[4]{x}(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x})} \, dx$$

$$m) \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx$$

$$n) \int \left(\frac{2-x}{3}\right)^2 e^x \, dx$$

$$o) \int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} \, dx$$

$$p) \int \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 1} \, dx$$

$$q) \int \frac{1}{x-1} \cdot \sqrt{\frac{x+3}{x-1}} \, dx$$

$$r) \int \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 1}{x^2} \, dx$$

$$s) \int \sin(\sqrt{x}) \, dx$$

$$t) \int \frac{x^2+2x-20}{x^3-6x^2+10x} \, dx$$

$$u) \int \frac{x^2-2}{x-x^2} \, dx$$

$$v) \int \frac{1}{3+e^x} \, dx$$

$$w) \int \frac{1}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x}} \, dx$$

$$x) \int \sqrt{e^x-1} \, dx$$

$$y) \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x-x^2}} \, dx$$

$$z) \int \frac{3x-1}{x^2-x+1} \, dx$$