

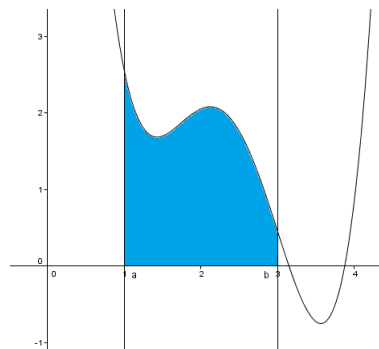
Využití integrálního počtu

Integrální počet patří mezi nejsilnější matematické nástroje. V dnešní vědě se bez něj neobejde jediné odvětví. Jeho přímá aplikace do matematiky spočívá ve výpočtech objemu rotačních těles, obsahu části roviny omezené křivkami a také délky křivky dané funkcí.

1. Výpočet obsahu části roviny

Nechť f je funkce, která je na intervalu $\langle a; b \rangle$ integrovatelná (pro zopakování - funkci lze na daném intervalu zintegrovat právě tehdy, pokud je na tomto intervalu spojitá a omezená) a **nezáporná**. Potom část roviny omezené grafem funkce f , osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ lze vypočítat jako

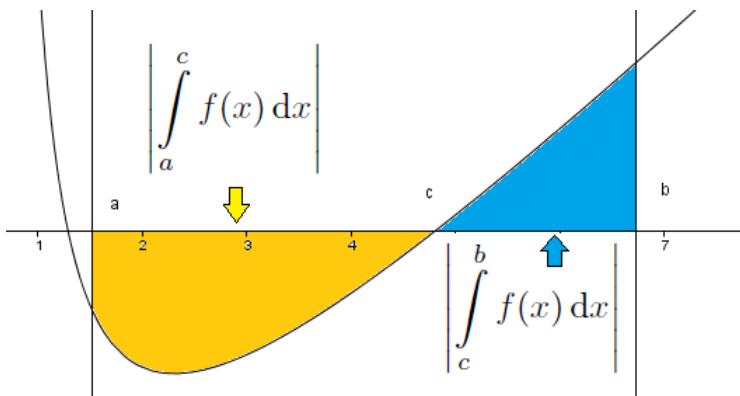
$$S = \int_a^b f(x) dx$$



Zásadní je podmínka nezápornosti dané funkce. Pokud chceme spočítat obsah funkce, která na intervalu $\langle a; b \rangle$ protíná osu v bodě c a graf jde v tomto bodě z oblasti nad osou do oblasti pod osou, či naopak, musíme výpočet rozdělit na dva - jeden na intervalu $\langle a; c \rangle$ a druhý na intervalu $\langle c; b \rangle$. Obsah oblasti pod osou vyjde záporně, takže má smysl uvažovat jen absolutní hodnotu z tohoto výsledku.

Výpočet tedy bude vypadat takto:

$$S = \left| \int_a^c f(x) dx \right| + \left| \int_c^b f(x) dx \right|$$

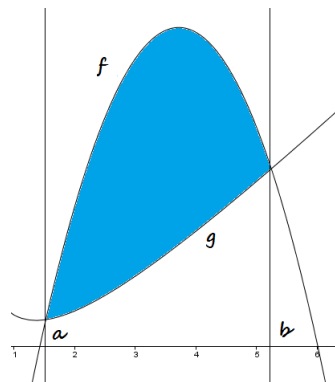


Nejzajímavější situace nastává, pokud hledáme obsah plochy, která je ohraničená dvěma na intervalu $\langle a; b \rangle$ integrovatelnými funkcemi. Označme S_f plochu pod grafem funkce f a S_g plochu pod grafem funkce g . Potom obsah plochy vymezené těmito funkcemi určíme jako $S_f - S_g$, kde

$$S_f = \int_a^b f(x) dx, \quad S_g = \int_a^b g(x) dx$$

Pochopitelně za předpokladu, že na celém intervalu $\langle a; b \rangle$ platí vztah $g(x) \leq f(x)$ a obě funkce jsou na něm zároveň nezáporné.

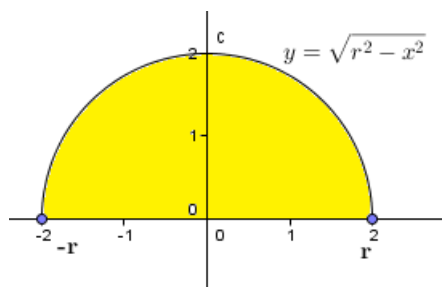
Pokud se funkce na tomto intervalu protínají, případně mění znaménko, počítáme obsah rozkladem na menší plochy, jejichž obsah umíme snadno určit.



2. Výpočet objemu rotačního tělesa

Nechť f je funkce, která je na intervalu $\langle a; b \rangle$ integrovatelná. Potom objem rotačního tělesa, která vznikne rotací grafu funkce okolo osy x lze vypočítat jako

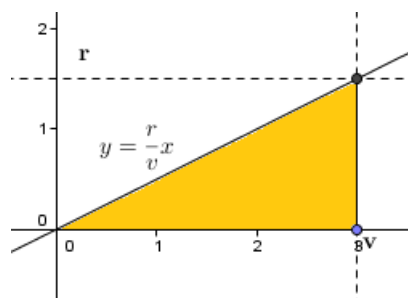
$$\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



Integrál tohoto typu lze využít k odvození objemu koule, válce a kuželu. Objem koule s poloměrem r odvodíme z toho, že rovnice kružnice s poloměrem r a středem v počátku soustavy souřadnic je (po úpravě) $y^2 = r^2 - x^2$. Tuto křivku považujeme na intervalu $\langle -r; r \rangle$ za nezápornou funkci. Následujícím způsobem lze tedy vypočítat objem tělesa, které vznikne rotací okolo osy x :

$$V_{koule} = \pi \int_{-r}^r r^2 - x^2 dx = \pi \int_{-r}^r r^2 dx - \pi \int_{-r}^r x^2 dx = \pi [r^2 x]_{-r}^r - \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \pi(r^3 + r^3) - \pi \left(\frac{r^3}{3} + \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Objem kuželu o poloměru podstavy r a výšce v odvodíme jako objem tělesa, které je určeno funkcí $y = \frac{r}{v}x$ na intervalu $\langle 0; v \rangle$.



$$V_{kužel} = \pi \int_0^v \frac{r^2}{v^2} x^2 dx = \pi \frac{r^2}{v^2} \int_0^v x^2 dx = \pi \frac{r^2}{v^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^v = \pi \frac{r^2}{v^2} \frac{v^3}{3} = \frac{\pi r^2 v}{3}$$

Objem válce o poloměru podstavy r a výšce v odvodíme jako objem tělesa, které je určeno funkcí $y = r$ na intervalu $\langle 0; v \rangle$.

$$V_{válec} = \pi \int_0^v r^2 dx = \pi [r^2 x]_0^v = \pi r^2 v$$

3. Výpočet délky křivky

Délka křivky na intervalu $\langle a; b \rangle$, která je dána funkcí f se spočítá jako

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

Takový výpočet vede často na integrály, které na střední škole neumíme vypočítat.