

Odvození vzorců pro výpočty derivací

Definice: Nechť f je funkce definovaná v okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom limitu (pokud tato limita existuje!):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

nazýváme *derivace funkce f v bodě x_0* . Značíme $f'(x_0)$.

Pomocí této definice odvodíme pravidla pro počítání s derivacemi a pro samotné výpočty už definici využívat nebudeme - podobně jako limity nevypočítáváme z definice, ale pomocí různých usnadňujících pravidel.

1. Derivace součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí

Nechť f, g jsou funkce, které jsou definované v okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom vzorce pro výpočet jejich součtu, rozdílu, součinu a podílu (pro podíl předpokládáme, že $g(x_0) \neq 0$ v okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$) odvodíme následovně:

a. **součet:**

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x))' &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} + \frac{(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} \right) + \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \right) = \\ &= f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

b. vztah pro **derivaci rozdílu** dvou funkcí dokážeme zcela analogicky

$$\begin{aligned} (f(x) - g(x))' &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - g(x)) - (f(x_0) - g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) - f(x_0)) + (-g(x) + g(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} - \frac{(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} \right) - \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \right) = \\ &= f'(x_0) - g'(x_0) \end{aligned}$$

c. Pro **součin** dvou funkcí platí:

$$\begin{aligned} (f(x) \cdot g(x))' &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) \cdot g(x)) - (f(x_0) \cdot g(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f(x) \cdot g(x)) - f(x) \cdot g(x_0) + f(x) \cdot g(x_0) - (f(x_0) \cdot g(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot (g(x) - g(x_0)) + g(x_0) \cdot (f(x) - f(x_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) \left(\frac{(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \right) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x_0) \left(\frac{(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} \right) = \\ &= f(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \right) - g(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} \right) = f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0) \end{aligned}$$

d. **Podíl** dvou funkcí lze odvodit dvěma způsoby. Buď přímo (jak níže předvedeme), nebo tak, že nejprve odvodíme derivaci funkce $\frac{1}{g(x)}$ a posléze dokazujeme vztah pro podíl jako součin dvou funkcí $f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$. Přímé odvození vypadá takto:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x - x_0} = \\ &= \frac{1}{g^2(x_0)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} = \\ &= \frac{1}{g^2(x_0)} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x_0)[f(x) - f(x_0)] - f(x_0)[g(x) - g(x_0)]}{x - x_0} = \\ &= \frac{1}{g^2(x_0)} \left(g(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) - \left(f(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} \end{aligned}$$

2. Derivace elementárních funkcí

Postupně odvodíme derivace všech elementárních funkcí.

a. **konstantní funkce** $f : y = c, \quad c \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

b. **mocninná funkce** $f : y = x^n, \quad n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}_{n \text{ členů}} = n \cdot x_0^{n-1} \end{aligned}$$

Je třeba mít na paměti, že toto odvození má smysl pouze pro přirozené mocniny. Pro libovolnou reálnou mocninu vztah odvodíme ve chvíli, kdy budeme mít odvozený vzorec pro exponenciální funkci.

c. **exponenciální funkce** Začneme funkcí $f : y = e^x$ a při důkazu využijeme alternativní definice derivace - derivace jako limita $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ a dále v postupu využijeme známého faktu, že $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} = 1$, tedy postupujeme takto:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} \cdot (e^h - 1)}{h} = e^{x_0} \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \right) = e^{x_0}$$

Pokud chceme dokázat vztah pro obecný základ exponenciální funkce, tedy pro základ $a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$, musíme využít stejné limity jako v předchozím důkazu a navíc známého vztahu $a^h = e^{(\ln a)h} = e^{h \cdot \ln a}$:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{(x_0+h)} - a^{x_0}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x_0}(a^h - 1)}{h} = a^{x_0} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a^h - 1)}{h} = a^{x_0} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(h \cdot \ln a)} - 1}{h} = \\ &= a^{x_0} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\ln a \cdot e^{(h \cdot \ln a)} - \ln a}{h \cdot \ln a} \right) = a^{x_0} \ln a \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^{(h \cdot \ln a)} - 1}{h \cdot \ln a} \right) = a^{x_0} \ln a \end{aligned}$$

Je třeba si uvědomit, že výše uvedené odvození využívá faktu, že výrazy a^x a $\ln a$ nezávisí na měnícím se h . Dále je zřejmé, že $\forall a \in \mathbb{R}$ platí, že $h \cdot \ln a = 0$ pro $h \rightarrow 0$. Bez těchto dvou vlastností by důkaz nebyl možný.

d. **logaritmická funkce** - při odvozování vzorce pro logaritmickou funkci využijeme vzorce pro derivaci **inverzní funkce** (tvrzení uvedeme bez důkazu). Začneme přirozeným logaritmem:

Derivace *inverzní funkce* - tedy derivace funkce $y_0 = f^{-1}(x_0)$, kde $x_0 = f(y_0)$:

$$y'_0 = (f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}$$

Nechť tedy $y = f^{-1}(x) = \ln x$, tedy $x = e^y$. Dále $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$ ($\Rightarrow f'(y) = e^y$). Ze vzorce pro derivaci inverzní funkce vyplývá, že:

$$(\ln x_0)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{(\ln x)}} = \frac{1}{x}$$

Snadno už získáme derivaci

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Nyní už můžeme přistoupit k rozšíření mocnin v mocninné funkci na všechna reálná čísla:

e. **mocninná funkce** - tedy funkce $f: y = x^n$, $n \in \mathbb{R}$. Odvodíme pomocí derivace složené funkce. Derivace *složené funkce* $F(x) = f[g(x)]$:

$$F'(x_0) = f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0)$$

Nechť tedy

$$(x^a)' = (e^{(a \cdot \ln x)})' = (e^{(a \cdot \ln x)}) \cdot (a \cdot \ln x)' = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = ax^{a-1}$$

f. **funkce sinus** $f: y = \sin x$. Využijeme vzorec pro rozdíl $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ a dále také známou limitu $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\cos \frac{x + x_0}{2} \right) = 1 \cdot \cos \frac{2x_0}{2} = \cos x_0 \end{aligned}$$

g. **funkce cosinus**: protože $\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$, platí:

$$(\cos x)' = \left(\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right)' = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \cos x \cos \frac{\pi}{2} - \sin x \sin \frac{\pi}{2} = -\sin x$$

Vzorec lze odvodit i zcela analogický způsobem jako vzorec pro sinus.

h. **funkce tangens a cotangens**: lze odvodit snadno jako derivace podílů funkcí

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{a} \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Pro zajímavost ukážeme **odvození vzorce pro cyklometrickou funkci** $y = \arcsin x$, tedy $x = \sin y$. Dále využijeme vztah $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ a vzorec pro derivaci inverzní funkce:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Odvození ostatních cyklometrických funkcí lze provést obdobně.