

Vyšetřování průběhu funkce pomocí diferenciálního počtu

Vyšetřování průběhu funkce patří mezi základní úlohy diferenciálního počtu. Pomocí jeho metod získáváme postupně představu o funkci, až jsme schopni sestavit náčrtek grafu funkce a zjistit její obor hodnot.

Při vyšetřování průběhu funkce postupujeme podle následujícího návodu:

1. Krok - Základní vlastnosti funkce:

a. Určení definičního oboru funkce - hledáme v předpisu ty části, které nějak omezují definiční obor (výrazy ve jmenovatelích, pod odmocninou, logaritmované výrazy, argumenty funkce tangens a cotangens).

b. Velmi důležitým bodem vyšetřování průběhu je také určování tzv. parity funkce - zda je funkce lichá či sudá. Paritu funkce zjistíme dosazením výrazu $-x$ za x do původního předpisu funkce. Pokud vyjde $f(-x) = x$, jde o sudou funkci, pro $f(-x) = -x$ jde o lichou funkci. Zjištění, že je funkce lichá (resp. sudá), může ušetřit mnoho práce - funkci stačí vyšetřovat pouze na intervalu $\langle 0; \infty \rangle$. Většina funkcí není bohužel ani lichá, ani sudá.

Pozn.: Je možné též určovat, zda jde o funkci periodickou. Pokud předpis funkce obsahuje v nějaké roli periodickou funkci, může se periodičnost projevit, ale nemusí tomu tak být vždy. Pokud je funkce sudá, jsou vlastnosti přímo symetrické podle čísla 0. Tedy pokud má funkce např. v bodě 3 lokální maximum, pak ho má jistě i v -3, je-li na intervalu $(6; 7)$ konvexní, pak je konvexní i na intervalu $(-7; -6)$ apod. Pokud jde o funkci lichou, obrací se vlastnosti, tedy pokud má funkce např. v bodě 8 lokální minimum, pak má jistě v -8 lokální maximum, je-li na intervalu $(3; 5)$ klesající, pak je na intervalu $(-5; -3)$ rostoucí apod. V praxi sudou, resp. lichou funkci vyšetřujeme vždy na intervalu $\langle 0; \infty \rangle$, protože na tomto intervalu lze předpokládat snazší práci se znaménky.

2. Krok - Vyšetření vlastností funkce ve významných bodech:

a. Určení limit v nevlastních bodech - Vždy vypočítáme limity $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$. Chování v nevlastních bodech je zásadní pro určování globálních extrémů.

b. Určení limit v izolovaných bodech, ve kterých funkce není definovaná Jedná se o výpočty obou jednostranných limit v každém bodě, ve kterých nelze dosazovat do předpisu funkce. Tedy jde o limity $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$, kde x_0 je bod nespojitosti funkce.

c. Určení průsečíků s osami - dosazením hodnoty $x = 0$ (resp. $y = 0$) do předpisu funkce dostaneme druhou souřadnici průsečíku s osou y (resp. x). Pokud je to v našich silách, určíme znaménka funkce v jednotlivých intervalech.

3. Krok - Derivace:

a. Spočítáme první derivaci funkce - první derivaci využíváme k vyšetření monotónnosti funkce. Na intervalech, kde je $f'(x) > 0$ je původní funkce f rostoucí, na intervalech, kde je $f'(x) < 0$ je původní funkce f klesající. Důležitými body jsou body, kde $f'(x) = 0$ (tyto body se nazývají *stacionární*) a body, ve kterých není derivace funkce f definována. Tyto body jsou *podezřelé s extrémů*. Zda v nich nastává extrém, poznáme ze změny znaménka derivace, nebo z hodnoty druhé derivace v těchto bodech. Ve stacionárních bodech v každém případě spočítáme funkční hodnoty - ať jde o extrém, či ne.

b. Spočítáme druhou derivaci funkce - z hodnoty druhé derivace zjišťujeme, zda je funkce konkávní či konvexní. Platí-li $f''(x) > 0$, je původní funkce f konvexní, je-li $f''(x) < 0$, je původní funkce f konkávní. Body, ve kterých $f''(x) = 0$, mohou být *inflexní*, pokud v nich druhá derivace mění své znaménko. Nakonec vypočítáme hodnoty funkce $f''(x)$ ve *stacionárních bodech* (označme je např. x_s), abychom zjistili, zda se v nich nachází extrémy. Je-li $f''(x_s) < 0$, jedná se o maximum, je-li $f''(x_s) > 0$, jedná se o minimum.

Pozn.: Celou situaci okolo první a druhé derivace nejlépe znázorníme pomocí tabulky, která rozdělí definiční obor na intervaly podle stacionárních a inflexních bodů. Např:

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 1 + \sqrt{3})$	$1 + \sqrt{3}$	$(1 + \sqrt{3}; 5)$	5	$(5; +\infty)$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$
$f'(x)$	$\oplus$	0	$\oplus$	0	$\ominus$	0	$\oplus$
$f(x)$	$\cap$	n.e.	$\cup$	lok.max.	$\cap$	lok.min.	$\cup$
$f''(x)$	$\ominus$	0	$\oplus$	-7	$\ominus$	1	$\oplus$

kde n.e. znamená "nenastává extrém"

4. Krok - Svislé a šikmé asymptoty funkce:

a. Svislé asymptoty (jinak též asymptoty bez směrnice) - svislé asymptoty má smysl uvažovat pouze v bodech, ve kterých není funkce f definována. Jejich rovnice je potom $x = a$, kde a je bod nespojitosti funkce f .

b. Šikmé asymptoty - šikmé asymptoty je nutné hledat pomocí výpočtu limit. Asymptotu hledáme ve směrnice tvaru, tedy $y = kx + q$. Směrnici k této přímky vypočítáme jako $k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, číslo q určíme jako $q = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx]$. Totéž vypočítáme pro $x \rightarrow -\infty$.

5. Krok - Graf a obor hodnot funkce:

Z informací získaných v prvních čtyřech krocích bychom měli být schopni sestavit graf. Zásadní je správné nanesení asymptot, průsečíků s osami, *stacionárních* a *inflexních* bodů. Od těchto objektů se odrazíme ke konstrukci celého grafu. Z grafu poté můžeme vyčíst obor hodnot.

Čekají nás **krásné grafy** tohoto typu:

